فصل اول: تعاریف و مفاهیم اولیه در سیستم های ارتعاشی

اجزای یک سیستم نوسانی: ۱- ذخیره کننده انرژی پتانسیل ۲- ذخیره کننده انرژی جنبشی ۳- مستهلک کننده انرژی

درجه آزادی: اجسام صلب در فضا دارای شش درجه آزادی و ذرات ۳ درجه آزادی دارند

سیستم های گسسته با تعداد محدودی مختصات بتوان حرکت آن را توصیف کرد

سیستم های پیوسته (ممتد) تعداد درجات آزادی سیستم نامحدود است

سیستم های خطی کلیه اجزای آن ها دارای رفتار خطی اند مثل یا شدول یا رابطه نوسان یک جک

ارتعاشات آزاد: سیستمی که بر اثر یک جابه جایی و یا سرعت اولیه از حالت تعادل استاتیکی خارج شود سپس بدون دخالت نیروی خارجی نوسان کند

ارتعاشات اجباری: اگر سیستمی تحت تأثیر یک نیروی خارجی نوسان کند مانند لرزش موتور و بدنه اتومبیل

ارتعاشات نامیرا: اگر در یک حرکت ارتعاشی انرژی مکانیکی سیستم هدر نرود

حرکت تناوبی: حرکتی که در فاصله های زمانی تکرار شود و زمان لازم برای انجام یک حرکت را دوره تناوب یا پریود T

فرکانس: به تعداد سیکل های حرکتی انجام شده در یک ثانیه f واحد هرتز $\frac{1}{s}$

$f=\frac{1}{T}$

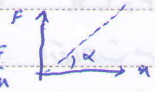
فرکانس زاویه ای: فرکانس دایره ای ω میزان زاویه پیموده شده برحسب رادیان در یک ثانیه

$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f \quad \frac{rad}{s}$

حرکت هارمونیک: معادله حرکت هارمونیک $x(t)=A\sin\omega t$ ω سرعت زاویه ای A دامنه نوسان

$\dot{x}=A\omega\cos\omega t = A\omega\sin(\omega t+\frac{\pi}{2})$ اختلاف فاز $\frac{\pi}{2}$ $\quad \ddot{x}=-A\omega^2\sin\omega t = A\omega^2\sin(\omega t+\pi)$

فنر: $F=Kx$ فنر خطی $\quad K=\tan\alpha=\frac{dF}{dx}$



هرچه شیب نمودار نیرو جابه جایی بیشتر باشد فنر سخت تر و در برابر نیرو مقاوم تر است

فنرها در حالت موازی تغییر مکان فنرها یکسان

$K_{eq}=K_1+K_2+K_3+\dots$

فنرها در حالت سری تغییر طول کل مجموعه برابر مجموع تغییرات

$K_{eq}=\frac{1}{1/K_1+1/K_2+1/K_3+\dots}$

سختی معادل فنر مایل

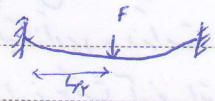
$K_{eq}=K\cos^2\alpha=K\sin^2\beta$

فنرهای پیچشی: T گشتاور و K_t سختی پیچشی و θ جابه جایی زاویه ای

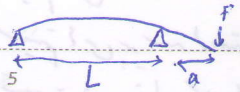
$T=K_t\theta$

$K_{eq} = \frac{EI}{L}$ → طول کل — گشتاور اینرسی مقطع عرضی — E مدول الاستیسیته

$K_e = \frac{48EI}{L^3}$



$K_{eq} = \frac{192EI}{L^3}$ اگر کابل باشد $K_{eq} = \frac{4T}{L}$

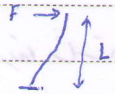


$K_e = \frac{3EI}{(L+a)a^2}$

$K_{eq} = \frac{3EI}{L^3}$

$K_e = \frac{3EIL}{a^2b^2}$

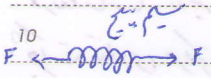
$K_{eq} = \frac{768EI}{L^3}$



$K_e = \frac{12EI}{L^3}$

$K_{eq} = \frac{EA}{L}$ — A سطح مقطع

سیستم فنر



$K_e = \frac{Gd^4}{64nR^3}$ — n تعداد پیچ — d قطر سیم — R شعاع حلقه

$K_e = \frac{GJ}{L}$ — G مدول الاستیسیته پیچشی

J ممان اینرسی قطبی $J = \frac{\pi}{32}(r_2^4 - r_1^4)$

اجزای میرایی (دمپر)

۱- مستهلک کننده مکانیکی: نیروی استهلاک ثابت در خلاف جهت حرکت

۲- مستهلک کننده ماده سازه‌ای: (هیسترزیس) گرم شدن فنری که خم شده

۳- مستهلک کننده ویسکوز: نیرو به صورت $F = cx$ — کار انجام شده توسط دمپر منفی است

$c_{eq} = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ اتصالات موازی

$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}$ اتصالات سری

در مقاومت از نیروهای ایزوتروپی که ناشی از شتاب و سرعت است هر فنر می‌تواند به صورت استاتیکی اعمال می‌شود

فصل دوم - ارتعاشات آزاد سیستم های یک درجه آزادی

ارتعاشات آزاد نا میرا

سیستم خطی — قانون دوم $\longrightarrow m\ddot{x}+kx=0$ — تغییر مکان استاتیکی فنر $\delta_{st}=\frac{mg}{k}$

فرکانس طبیعی $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$ — $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$ — $x(t)=A_1\cos\omega_n t+A_2\sin\omega_n t$ — پاسخ حقیقی $x(t)$

$A_1=x_0 \quad A_2=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}$ — $f=\frac{\omega_n}{2\pi}$ رابطه پریود با فرکانس

$x(t)=A\cos(\omega_n t-\varphi) \quad A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\dot{x}}{x\omega_n}\right)$

سیستم پیچشی — سختی پیچشی k_t — ممان اینرسی J — $J\ddot{\theta}+k_t\theta=0$

بدست آوردن معادله حرکت با استفاده از روش انرژی برای سیستم های نسبتاً پیچیده

$T+U=$ ثابت $\quad \frac{d}{dt}(T+U)=0 \xrightarrow[T_1+U_1=T_2+U_2]{} \omega$

بدست آوردن معادله حرکت با استفاده از روش رایلی برای سیستم دارای چندین جرم و عضو

انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را برحسب یکی از مختصه های حرکتی نوشته

$T=\frac{1}{2}m_{eff}\dot{x}^2 \quad U=\frac{1}{2}k_{eff}x^2$

m_{eff} جرم مؤثر (معادل) — k_{eff} سختی مؤثر (معادل)

$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}$

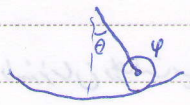
سیستم دورانی: I_{eff} ممان اینرسی مؤثر (معادل) — $k_{t\,eff}$ سختی پیچشی مؤثر (معادل)

$T=\frac{1}{2}I_{eff}\dot{\theta}^2 \quad U=\frac{1}{2}k_{t\,eff}\theta^2$

فرض روش رایلی: ۱- سیستم کانسرواتیو ۲- حرکت ارمونیک ساده

$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{t\,eff}}{I_{eff}}}$

* آیا اثر وزن توسط فنر خنثی می شود یا نه؟ فنر را حذف کرده اگر سیستم از حالت تعادل استاتیکی خارج شود فنر نیروی وزن را خنثی می کند
* اگر در سیستم چند جرمی از مقداری از جرم ها توسط فنر خنثی شده و مقداری نه در دیاگرام آزاد و معادلات فقط حالت اثر وزن جرم های دوم منظور می گردد
* چون با دوران کوچک θ، بازوی گشتاور نیروی وزن حول مفصل تغییر می کند) لذا نیروی وزن در معادلات ظاهر می شود
* کلاً نیروی وزن زمانی در معادلات ظاهر شده که جسم طوری جابجایی تغییر ارتفاع دهد و شرط خنثی نشدن اینرسی یا شرط تغییر بازوی گشتاور را داشته باشد



* اگر گشتاور نیروی فنر از نیروی وزن بیشتر باشد حرکت سیستم ارتعاشی و پایدار است

انرژی جنبشی سیستم $\quad T=\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 \quad U=mg(R-r)(1-\cos\theta)$

ضریب میرایی $\quad \xi=\frac{c_{eff}}{2\sqrt{k_{eff}m_{eff}}}$

$T = \frac{1}{2}(m + \frac{1}{3}m')\dot{x}^2$ زمانی که تقریباً پیوسته جرم سختی جرم فنر m'

$m_{eff} = m + \frac{1}{3}m'$ * تأثیر وارد شدن جرم فنر در معادلات ارتعاشی و فرکانس طبیعی به میزان $\frac{1}{3}$ جرم فنر است

* تعیین فرکانس طبیعی اول یک سیستم به روش رلی همیشه از مقدار واقعی بیشتر است

$\omega_n = \sqrt{\frac{mgd}{J_0}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{J_0}{md}}}$

پاندول مرکب جرم در جایی به غیر از مرکز جرم آویزان شده

$\frac{J_0}{md}$ طول معادل پاندول ساده

اگر A را در راستای OG انتخاب کنیم که $OA = \frac{J_0}{md}$ باشد، آنگاه A را مرکز ضربه گویند

اگر مفصل دوران بجای O در A باشد فرکانس طبیعی سیستم تغییر نمی‌کند

$\frac{c}{2}$ $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ ارتعاشات آزاد سیستم‌های با میرایی ویسکوز

$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ پاسخ کلی $\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$

$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n}$ نسبت میرایی ξ

$c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n$ $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega_n t}$ حالت بحرانی زیرا دامپاژ صفر شده

$x(t) = c_1 e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + c_2 e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$

$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega_n t}$ در حالت بحرانی $\xi = 1$

حالت کندمیرا $\xi < 1$

$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left[c_1 e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n t} + c_2 e^{-i(\sqrt{1-\xi^2})\omega_n t}\right]$

$c_1 + c_2 = A_1$, $(c_1 - c_2)i = A_2$ $\rightarrow$ $x(t) = A e^{-\xi\omega_n t}\cos(\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}_{\omega_d \text{ فرکانس}} t - \varphi)$, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$

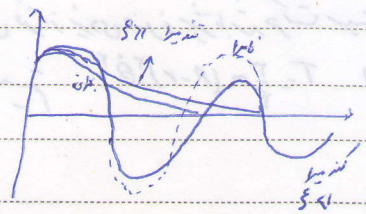
$A_1 = x_0$ $A_2 = \left[\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n}\right]$

در این حالت دامنه نوسان به صورت نمایی کم می‌شود تا در زمان دراز دامنه نوسان به سمت صفر رود

فرکانس نوسان میرا کوچکتر از فرکانس طبیعی و پریود نوسان میرا بزرگتر از پریود طبیعی

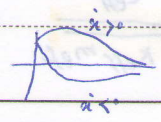
حالت تندمیرا $\xi > 1$

$x(t) = c_1 e^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + c_2 e^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}$



دامنه نوسان در حالت میرایی بحرانی سبت دو حالت دیگر سریعتر میرا می‌شود

دامنه نوسان در حالت میرا به صورت نمایی $e^{-\xi\omega_n t}$ کاهش می‌یابد



میرای بحرانی

کاهش لگاریتمی

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \ln e^{\xi \omega_n T_d} = \xi \omega_n T_d = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\ln \frac{x_1}{x_n} = (n-1) \ln \frac{x_1}{x_2} \qquad \ln \frac{x_m}{x_n} = (n-m) \ln \frac{x_1}{x_2}$$

هنگامی که مقدار ξ کوچک باشد $\delta = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi$

* در یک سیستم که دارای نوسانات میرا باشد هر چه میرایی سیستم بزرگتر نرخ کاهش دامنه آن بزرگتر

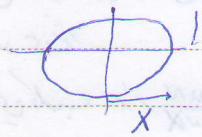
انرژی اتلافی در میرایی ویسکوز

$W = \pi c \omega X^2 \leftarrow$ مربع دامنه

کار انجام شده توسط نیروی فنر در یک سیکل حرکتی برابر صفر زیرا نیروی فنر یک نیروی پایستار است

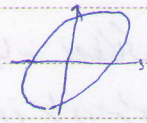
$F = c\dot{x} = c\omega X \cos(\omega t - \varphi)$ نیروی میرا

$$\left(\frac{F}{c\omega X}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 = 1$$



مساحت داخل برابر همان انرژی اتلافی در یک سیکل است

$$\left(\frac{F - kx}{c\omega X}\right)^2 + \left(\frac{x}{X}\right)^2 = 1$$



هنگامی که فنر دو میرایی باشد انرژی همان $\pi c \omega X^2$ زیرا کار فنر صفر است

ظرفیت میرایی ویژه: نسبت انرژی اتلافی در یک سیکل به انرژی جنبشی یا پتانسیل ماکزیمم در یک سیکل

$\frac{2\pi c}{m\omega}$

ضریب افت $= \frac{c}{m\omega}$

روش رلی

$$D.E = \frac{1}{2} (C_{eff}) \dot{x}^2$$

C_{eff} θ^2

ارتعاشات آزاد با میرایی کلمب: ناشی از اصطکاک - جهت نیروی میرایی همیشه در خلاف جهت حرکت است $F_d = \mu N$

$m\ddot{x} + kx = F_d \quad \dot{x} < 0$

$m\ddot{x} + kx = F_d \quad \dot{x} > 0$

* برای حرکت گردان جرم باید $|kx_0| > \mu N$

معادله حرکت نیم سیکل

$x(t) = (x_0 - \frac{\mu N}{k}) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{k}$

دامنه حرکت در پایان نیم سیکل اول به اندازه $\frac{2\mu N}{k}$ کاهش می یابد

دامنه حرکت در نیم سیکل دوم

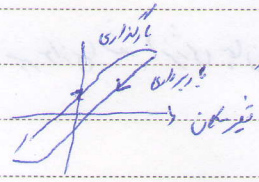
$x(t) = (\frac{3\mu N}{k} - x) \cos \omega_n t - \frac{\mu N}{k}$

* در حرکت میرایی کلمب دامنه ارتعاش در هر سیکل به اندازه $\frac{4\mu N}{k}$ کاهش می یابد
* حرکت تا پایان نیم سیکل ادامه پیدا می کند که نیروی اصطکاک از فنر بیشتر شود

$n \geq \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{k}}$

* فرکانس ارتعاش سیستم با میرایی کلمب همان فرکانس طبیعی سیستم است
* در استهلاک ویسکوز چون جرم به محل دوبیه بری گردد کل انرژی سیستم تلف می شود اما در اصطکاک خشک فقط
لذا انرژی اصطکاک خشک کمتر تلف می شود
* میرایی ویسکوز معادل برابر میرایی کلمب برابر $\frac{4\mu N}{\pi \omega X}$ می باشد

ارتعاش آزاد با میرایی سیالی: اصطکاک در لایه های داخلی یک جامد
عموماً نیرو - تغییر مکان برای میرایی سیالی



در میرایی سیالی انرژی اتلافی به فرکانس بستگی ندارد و فقط با مربع دامنه متناسب است $W = \pi h X^2$

h ضریب میرایی

فصل ۳ - ارتعاشات اجباری سیستم یک درجه آزادی

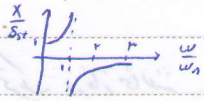
ارتعاشات اجباری یک سیستم نامیرا

پاسخ یک سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

$$m\ddot{x} + Kx = F(t) = F_0 \sin \omega t$$

$$x = \underbrace{\left[A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t\right]}_{\text{حل همگن (پاسخ گذرا)}} + \underbrace{\overbrace{\frac{F_0}{K - m\omega^2}}^{X} \sin \omega t}_{\text{حل خصوصی (پاسخ ماندگار)}}$$

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



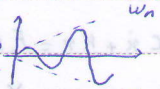
اگر x_0 و $\dot{x}_0$ شرایط اولیه حرکت

$$A_1 = x_0 \qquad A_2 = \frac{\dot{x}_0 - \frac{F_0 \omega}{K - m\omega^2}}{\omega_n}$$

* اگر $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ باشد، مخرج رابطه (بزرگنمایی X) مثبت بوده و در این حالت پاسخ هارمونیک سیستم و نیروی تحریک برانگیزش هم علامت و هم فاز می باشند
* اگر $\frac{\omega}{\omega_n}$ را از صفر تا ۱ افزایش دهیم اندازه دامنه X و ضریب بزرگنمایی به صورت پیوسته از ۱ شروع به افزایش می کند
* اگر $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ اندازه دامنه X بی نهایت می شود (تشدید) و پاسخ سیستم در این حالت:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{\delta_{st}}{2}\left[t\omega_n \cos \omega_n t + \sin \omega_n t\right]$$

دامنه به صورت خطی افزایش می یابد

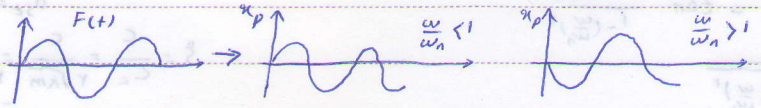


* اگر $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ ، X و ضریب بزرگنمایی منفی اند و پاسخ بخش خصوصی

$$x_p = -X \sin \omega t$$

و برانگیزش و پاسخ ۱۸۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند

$$X = -\left(\frac{\delta_{st}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) = \frac{\delta_{st}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1}$$



پدیده فرباز

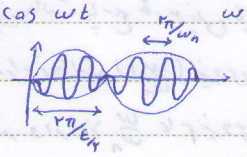
اگر فرکانس نیروی برانگیزش خارجی نزدیک به فرکانس طبیعی سیستم باشد ولی مساوی آن نباشد ممکن است پدیده فرباز روی دهد که دامنه نوسان به صورت منظمی کاهش و افزایش می یابد و خود دامنه نوسان به صورت هارمونیک تغییر می کند

$$\omega = \omega_n + \varepsilon$$

پاسخ سیستم

$$x(t) = \frac{-F_0}{K - m\omega^2} \cos \omega_n t + \frac{F_0}{K - m\omega^2} \cos \omega t$$

$$x(t) = \underbrace{\left[\frac{F_0}{\varepsilon m \omega_n} \sin\left(\frac{\varepsilon}{2} t\right)\right]}_{\text{دامنه نوسان خود به صورت هارمونیک}} \sin \omega_n t$$



ناموزنی چرخشی برای یک سیستم نامیرا

جرم کوچک m در داخل سیستم با سرعت زاویه ای ω و خروج از مرکز e دوران می کند و ایجاد ناموزنی می کند

$$M\ddot{x} + Kx = me\omega^2 \sin \omega t \qquad x_p = X \sin \omega t \qquad X = \frac{me\omega^2}{K - M\omega^2} = \frac{e\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

اگر $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ مقدار X مثبت است و پاسخ x_p با ناموزنی هم فاز است و اگر $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ و پاسخ x_p و ناموزنی ۱۸۰° اختلاف دارند

حرکت تکیه‌گاه در یک سیستم نامیرا

اگر به پایه $y = Y\sin\omega t$ حرکت هارمونیک بدهیم معادله دیفرانسیل حرکت $m\ddot{x} + Kx = Ky = KY\sin\omega t$

$$\rightarrow -m\omega^2 X\sin\omega t + KX\sin\omega t = KY\sin\omega t$$

$$x_p(t) = X\sin\omega t \quad , \quad X = \frac{KY}{K - m\omega^2} = \frac{Y}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

* اگر $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ مقدار X مثبت و لذا پاسخ و تحریک هم فاز نه و اگر $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ مقدار X منفی می‌شود و x_p با تحریک در فاز مخالفند

اگر $z = x - y$

$$\rightarrow -mZ\omega^2\sin\omega t + KZ\sin\omega t = mY\omega^2\sin\omega t \qquad Z = \frac{mY\omega^2}{K - m\omega^2} = \frac{Y\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

اگر $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ پاسخ z_p با تحریک هم فاز نه و اگر $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ باشد مقدار z منفی می‌شود و پاسخ z_p و تحریک با هم در فاز مخالفند

$$\omega = \frac{2\pi V}{L} \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

ارتعاشات اجباری یک سیستم میرا

پاسخ یک سیستم میرا به تحریک هارمونیک

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F_0\sin\omega t$$

حل خصوصی $x_p(t) = X\sin(\omega t - \varphi)$

دامنه نوسان $X = \dfrac{F_0}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$

اختلاف فاز نسبت به تحریک $\varphi = \tan^{-1}\dfrac{c\omega}{K - m\omega^2} = \tan^{-1}\dfrac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

ضریب بزرگنمایی $\dfrac{X}{\delta_{st}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \delta_{st} = \frac{F_0}{K} \qquad \xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{Km}} = \frac{K}{2m\omega_n}$$

نکات

۱- هنگامی که استهلاک وجود دارد بیشترین دامنه و ضریب بزرگنمایی در $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ رخ می‌دهد

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\xi^2} \qquad \left.\frac{X}{\delta_{st}}\right|_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

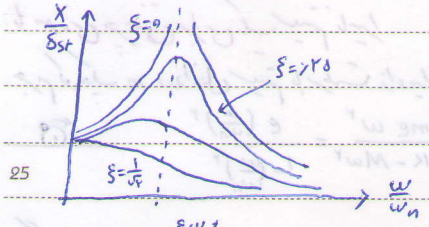
برای $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ نسبت فرکانس $\frac{\omega}{\omega_n}$ بیشترین دامنه را بیشترین دامنه در $\frac{\omega}{\omega_n} = 0$ رخ می‌دهد

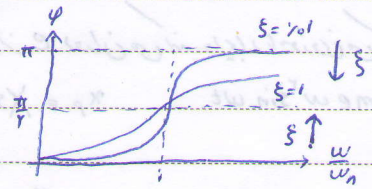
برای $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$

۲- در حالت تشدید $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ ضریب بزرگنمایی $\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{2\xi}$ در این حالت پاسخ هارمونیک با نیروی برانگیزش $\varphi = \frac{\pi}{2}$ اختلاف فاز دارد

وی تحریک صرف غلبه بر میرایی می‌شود یعنی $F_0 = cX\omega_n$ در این حالت $(\frac{\omega}{\omega_n} = 1)$ نیروی فنر با نیروی اینرسی برابر است

و در حالت $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ نیروی تحریک صرف غلبه بر نیروی فنر می‌کند و در $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ تمام نیروی فنر صرف غلبه بر نیروی اینرسی می‌کند





اگر ضریب میرایی ارتعاش کوچک باشد جواب کلی معادله $x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \varphi) + X\sin(\omega t - \varphi)$

پاسخ گذرا (به شرایط اولیه بستگی دارد) — پاسخ ماندگار (به نیروی تحریک) — ارتعاش

پاسخ یک سیستم میرا به شیوه اعداد مختلط

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0e^{i\omega t}=\overset{\text{حقیقی}}{F_0\cos\omega t}+i\overset{\text{موهومی}}{F_0\sin\omega t}$$

$$x_p=Xe^{i\omega t}\qquad X=\frac{F_0}{(k-m\omega^2)+ic\omega}\qquad \varphi=\tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}$$

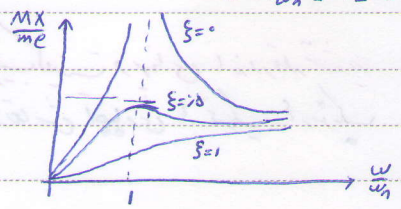
$$x_p(t)=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\begin{cases}\cos(\omega t-\varphi)t & \leftarrow F(t)=F_0\cos\omega t\\ \sin(\omega t-\varphi)t & \leftarrow F(t)=F_0\sin\omega t\end{cases}$$

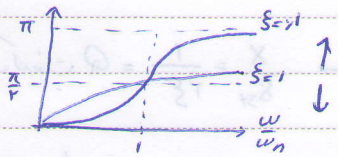
نامیرایی چرخشی در سیستم

$$M\ddot{x}+c\dot{x}+kx=me\omega^2\sin\omega t$$

$$X=\frac{me\omega^2}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\qquad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-M\omega^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right)$$

ضریب بزرگنمایی $\quad \frac{MX}{me}=\frac{(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{\sqrt{[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]^2+[2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})]^2}}$





برای $\xi<\frac{1}{\sqrt{2}}$ ماکزیمم دامنه X و ضریب بزرگنمایی در $\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}>1$ رخ می‌دهد لذا یک نوسان در اطراف $\frac{\omega}{\omega_n}$ رخ می‌دهد

$$x(t)=Ae^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi)+X\sin(\omega t-\varphi)$$

پاسخ یک سیستم میرا به حرکت تکیه‌گاهی

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=c\dot{y}+ky=\sqrt{(c\omega Y)^2+(kY)^2}\sin(\omega t-\psi)$$

$$\psi=\tan^{-1}\left(-\frac{c\omega Y}{kY}\right)=\tan^{-1}\left(-\frac{c\omega}{k}\right)$$

پاسخ پایدار $\quad x_p=X\sin(\omega t-\psi-\varphi)=\frac{Y\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t-\psi-\varphi)\qquad \varphi=\tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)$

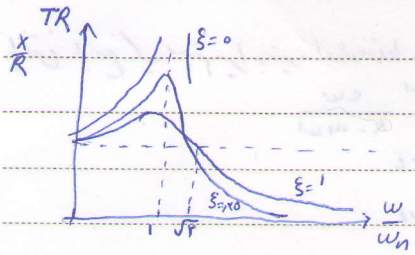
نسبت انتقال پذیری $TR=\frac{X}{Y}=\frac{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=\sqrt{\frac{1+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$

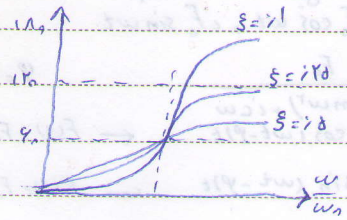
اختلاف فاز بین x و y $\quad \alpha=\psi+\varphi=\tan^{-1}\left(-\frac{c\omega}{k}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}\right)-\tan^{-1}\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)$

$z=x-y$ جابجایی نسبی $\longrightarrow m\ddot{z}+c\dot{z}+kz=-m\ddot{y}=m\omega^2Y\sin\omega t$

$$z(t)=Z\sin(\omega t-\varphi)\qquad Z=\frac{mY\omega^2}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=\frac{Y(\frac{\omega}{\omega_n})^2}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi(\frac{\omega}{\omega_n}))^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}=\tan^{-1}\frac{2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$





$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ - برای هر ξ ← $TR=1$

$\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{2}$ برای هر ξ ← $TR=1$ و دامنه $Y=X$

در $\frac{\omega}{\omega_n}\to 1$ برای $\xi=0$ ← $TR=\infty$ سیستم ناپایدار

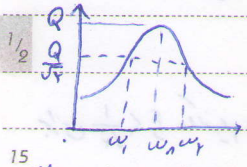
$\frac{\omega}{\omega_n}<\sqrt{2}$ برای هر ξ ← $TR>1$ دامنه $Y<X$ ← با افزایش ξ ← TR کاهش

$\frac{\omega}{\omega_n}>\sqrt{2}$ برای هر ξ ← $TR<1$ و دامنه $Y>X$ ← با افزایش ξ ← TR افزایش

ضریب کیفیت و پهنای باند در قله تشدید

در ارتعاش اجباری با تحریک هارمونیک

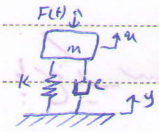
$\frac{\omega}{\omega_n}=1$ تشدید $\longrightarrow$ $\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{2\xi}=Q$ ضریب کیفیت



$\frac{\omega_n}{\omega_2-\omega_1}=\frac{1}{2\xi}=Q$

$\omega_2-\omega_1=2\xi\omega_n$

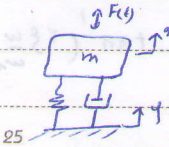
پهنای باند = اختلاف دو فرکانس ω_1 و ω_2



نیروی وارد بر پایه در ارتعاش اجباری با نیروی برانگیزش خارجی هارمونیک

نیروی منتقل شده $F_{t_0}=\frac{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}\,F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$ دامنه

قابلیت انتقال پذیری $T_R=\frac{F_{t_0}}{F_0}=\sqrt{\frac{k^2+(c\omega)^2}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}=\sqrt{\frac{1+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$

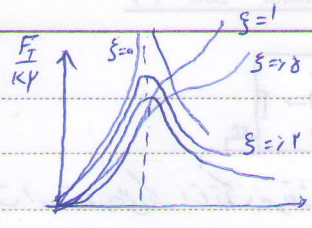


اگر $\frac{\omega}{\omega_n}$ و ξ ↓ ← TR کم می‌شود

نیروی وارده بر پایه در ارتعاش اجباری با حرکت یکنواخت پایه

$F_t=k(x-y)+c(\dot{x}-\dot{y})=-m\ddot{x}=m\omega^2X=m\omega^2Y\sqrt{\frac{1+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$

انتقال پذیری $\frac{F_T}{KY} = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \sqrt{\frac{1+\left(2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$



جداسازی ارتعاشات

کاهش امکان از انتقال نیروهای حرکتی و ارتعاشاتی مضر به سیستم ارتعاشاتی و یا سازه و تکیه‌گاه جلوگیری کرد

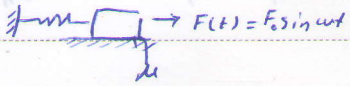
برای $T_R < 1$ باید $\sqrt{2} < \frac{\omega}{\omega_n}$ (فرکانس تحریک بالا) ← جداسازی ارتعاشات

ناحیه $\sqrt{2} < \frac{\omega}{\omega_n}$ را ناحیه جداسازی ارتعاشات گویند

اگر $\sqrt{2} \ll \frac{\omega}{\omega_n}$ نسبت انتقال پذیری T_R به سمت صفر میل می‌کند

$\xi \downarrow \rightarrow T_R \downarrow \rightarrow$ افزایش جداسازی

پاسخ هارمونیک یک سیستم با میرایی کلمب



$$m\ddot{x} + Kx = \pm\mu N + F(t)$$

ضریب میرایی ویسکوز معادل برای سیستم با نیروی اصطکاک خشک μN را اینگونه نشان می‌کند $C_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi\omega X}$

$$\xi_{eq} = \frac{C_{eq}}{C} = \frac{4\mu N}{\pi\omega X(2m\omega_n)} = \frac{2\mu N}{\pi\sqrt{Km}\,\omega X} \qquad x_p(t) = X\sin(\omega t - \varphi)$$

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(K-m\omega^2)^2+(C_{eq}\omega)^2}} = \frac{\left(\frac{F_0}{K}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi_{eq}\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(K-m\omega^2)^2+\left(\frac{4\mu N}{\pi X}\right)^2}} = \frac{F_0}{K}\sqrt{\frac{1-\left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}}$$

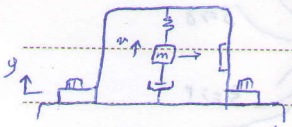
با نیروی اصطکاک به نیروی محرک کمتر از $\frac{\pi}{4}$ برای $\frac{\mu N}{F_0} < \frac{\pi}{4}$ پاسخ X بدست آمده حقیقی می‌باشد

زاویه فاز $\varphi = \tan^{-1}\frac{C_{eq}\omega}{K-m\omega^2} = \tan^{-1}\frac{4\mu N/\pi X}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \tan^{-1}\left[\frac{4\mu N}{\pi F_0}\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)}\right] = \tan$

برای $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ زاویه فاز φ معنی ندارد

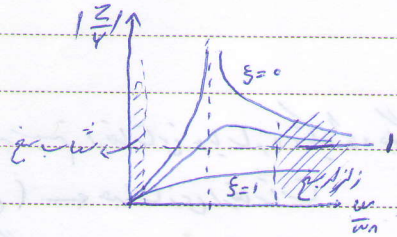
$$\varphi = \tan^{-1}\left[\frac{\pm\frac{F}{\pi}\left(\frac{\mu N}{F_0}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{4\mu N}{\pi F_0}\right)^2}}\right]$$

برای $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$ + برای $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$ −



زلزله سنج (دستگاهی با فرکانس طبیعی پایین)

$\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 \rightarrow \frac{Z}{Y} \rightarrow 1$ و $X \rightarrow 0 \rightarrow$ جرم m ثابت است در حالی که اتاقک مرتعش است



شتاب سنج (دستگاهی با فرکانس طبیعی بالا)

$\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 \rightarrow \left|\frac{Z}{Y}\right| \simeq \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ و مستقل از ξ

$Z \simeq \frac{\omega^2 Y}{\omega_n^2} = \frac{\text{شتاب اتاقک}}{\omega_n^2}$

فصل ۴ - ارتعاشات گذرای سیستم یک درجه آزادی

تحریک ضربه‌ای (ضربه: نیروی با اندازه زیاد و مدت اثر کم) ضربه $\hat{F} = \int F(t)\,dt$

$$\begin{cases} F(t)\,\delta(t-\varepsilon) = 0 & t \neq \varepsilon \\ F(t)\,\delta(t-\varepsilon) = F(\varepsilon)\,\delta(\varepsilon-\varepsilon) = \infty & t = \varepsilon \end{cases}$$

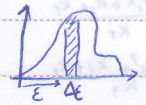
پاسخ به ضربه

جرم و فنر نامیرا $x(t) = \dfrac{\hat{F}}{m\omega_n}\sin\omega_n t = \hat{F}\,h(t)$

جرم و فنر میرا $x(t) = \dfrac{\hat{F}}{m\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\,e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t) = \hat{F}\,h(t)$ پاسخ به ضربه واحد $h(t)$

پاسخ به برانگیزش کلی

برای یک نیروی کلی



سهم تمام ضربه‌ای را که قبل از زمان t وارد می‌شود $\xleftarrow{\text{جمع}}$

$$x(t) = \int_0^t F(\varepsilon)\,h(t-\varepsilon)\,d\varepsilon$$

* انتگرال بالا را انتگرال کانولوشن (درهم‌نهش) فقط برای سیستم خطی قابل استفاده است

پاسخ سیستم در حرکت تکیه‌گاهی

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{g}(t) + kg(t)$$

سیستم نامیرا $x(t) = y(t) + z(t) = y(t) - \dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_0^t \ddot{g}(\varepsilon)\sin(t-\varepsilon)\,d\varepsilon$

سیستم میرا $x(t) = y(t) + z(t) = y(t) - \dfrac{1}{\omega_n}\displaystyle\int_0^t \ddot{g}(\varepsilon)\,e^{-\xi\omega_n(t-\varepsilon)}\sin(t-\varepsilon)\,d\varepsilon$

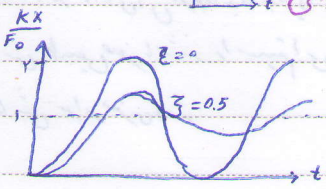
پاسخ مطلق $x(t)$

پاسخ $z(t)$

پاسخ سیستم به برانگیزش پله‌ای

$$x(t) = \underbrace{A\,e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \varphi)}_{\text{پاسخ خصوصی}} + \frac{F_0}{m\omega_n^2}$$

$$A = \frac{F_0}{m\omega_n^2\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right)$$



پاسخ سیستم با شرایط اولیه صفر به برانگیزش پله

پاسخ سیستم به برانگیزش شیب

$$x(t) = A\,e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t - \varphi) + \frac{F_0}{k t_1}\left[t - \frac{c}{k}\right]$$

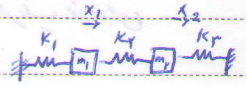
طیف پاسخ: نمودار x_{max} با برانگیزش خارجی برحسب فرکانس طبیعی سیستم

شوک (پالس) اگر مدت برانگیزش خارجی کوچک باشد به آن شوک یا پالس گویند

فصل ۵- ارتعاشات سیستم های با بیش از یک درجه آزادی

ارتعاشات آزاد سیستم های دو درجه آزادی

- سیستم های دو درجه آزادی خطی بی‌نیرا



$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2+(k_2+k_3)x_2-k_2x_1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-m_1\omega^2+k_1+k_2)X_1-k_2X_2=0 \\ (-m_2\omega^2+k_2+k_3)X_2-k_2X_1=0 \end{cases} \rightarrow \overset{A}{\begin{bmatrix} -m_1\omega^2+k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2+k_2+k_3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} =$$

$\det A=0$ معادله مشخصه یا معادله فرکانس است که فرکانس طبیعی (صفر قرار دادن دترمینان دو برد بدست می آید)

$$\omega_{1,2}^2=\frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1 \mp \sqrt{[(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1]^2-4m_1m_2[(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2]}}{2m_1m_2}$$

نسبت دامنه

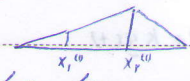
$$\begin{cases} r_1=\dfrac{X_2}{X_1}\Big|_{\omega_1}=\dfrac{-m_1\omega_1^2+k_1+k_2}{k_2} \\ r_2=\dfrac{X_2}{X_1}\Big|_{\omega_2}=\dfrac{-m_1\omega_2^2+k_1+k_2}{k_2} \end{cases}$$

برای سیستم های دو درجه آزادی که مقدار r_1 به طور بزرگتر از صفر می باشد و مقدار r_2 همواره کوچکتر از صفر می باشد (اگر سیستم به صلب داشته باشد $r_1=0$ می گردد) $r_1>0$ و $r_2<0$

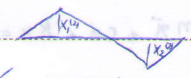
دامنه های مربوط به ω_1 ← $X_1^{(1)}$ و $X_2^{(1)}$ و دامنه های مربوط به ω_2 ← $X_1^{(2)}$ و $X_2^{(2)}$

$$\vec{X}^{(1)}=\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1X_1^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad \vec{X}^{(2)}=\begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2X_1^{(2)} \end{Bmatrix}$$

شکل مد مربوط به فرکانس طبیعی ω_1



مد اول (در یک جهت حرکت کنند)



مد دوم (در خلاف جهت هم حرکت کنند)

$$X(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}=\vec{X}^{(1)}(t)+\vec{X}^{(2)}(t)=\begin{cases} X_1^{(1)}\sin(\omega_1t-\varphi_1)+X_1^{(2)}\sin(\omega_2t-\varphi_2) \rightarrow m_1 \text{ مربوط به جرم} \\ r_1X_1^{(1)}\sin(\omega_1t-\varphi_1)+r_2X_1^{(2)}\sin(\omega_2t-\varphi_2) \rightarrow m_2 \text{ مربوط به جرم} \end{cases}$$

و ۴ شرط اولیه داریم $\begin{pmatrix} x_1(0), \dot{x}_1(0) \\ x_2(0), \dot{x}_2(0) \end{pmatrix}$

* هر سیستم N درجه آزادی دارای 2N شرط اولیه حرکت می باشد که N تای آن مربوط به جابه جایی های اولیه و N تای آن مربوط به سرعت اولیه

سیستم های ارتعاشی را که دارای حداقل یک مد صلب و فرکانس طبیعی صفر باشند را سیستم های نیمه معین، غیر مقید و سیستم های آزادی نامند

* فرکانس طبیعی مربوط به حرکت مد های صلب سیستم های ارتعاشی برابر صفر می باشد

- سیستم های دو درجه آزادی پیچشی بی‌نیرا

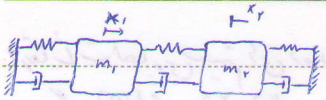
$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1+(k_{t_1}+k_{t_2})\theta_1-k_{t_2}\theta_2=0 \\ J_2\ddot{\theta}_2+(k_{t_2}+k_{t_3})\theta_2-k_{t_2}\theta_1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} -J_1\omega^2+k_{t_1}+k_{t_2} & -k_{t_2} \\ -k_{t_2} & -J_2\omega^2+k_{t_2}+k_{t_3} \end{vmatrix}=0$$

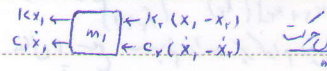
- سیستم های دو درجه آزادی متقارن

- مد اول $(\theta_2=\theta_1)$ هر دو جرم با هم حرکت می کنند که می توان فنر میانی آن را برداشت به جای آن اتصال صلب گذاشت

- مد دوم $(\theta_2=-\theta_1)$ حرکت دو جرم دارای تقارن است و می توان دو سر فنر وسطی یک گره با کمی تشکیل داد و سیستم به سیستم یک درجه آزادی تبدیل می شود

ارتعاشات آزاد سیستم های دو درجه آزادی خطی





$\xrightarrow[\text{جرم}]{\text{معادله دیفرانسیل حرکت}}$ $m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0$

$$[m]\ddot{\vec{x}}+[c]\dot{\vec{x}}+[k]\vec{x}=0$$
$$[J]\ddot{\vec{\theta}}+[c_t]\dot{\vec{\theta}}+[k_t]\vec{\theta}=0$$

ماتریس اینرسی، میرایی، سختی و انعطاف پذیری

$[M]$ ماتریس خواص بردار شتاب $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ (ماتریس اینرسی)

$[C]$ ماتریس خواص بردار سرعت $\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}$ (ماتریس میرایی)

$[K]$ ماتریس خواص بردار جابه جایی $\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$ (ماتریس سختی)

$[a]=[K]^{-1}$ ماتریس انعطاف پذیری $[a]$

$c=0$ دستگاه اگر: $[[K]-\omega^2[m]]\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}\sin(\omega t-\varphi)=0 \longrightarrow \det([K]-\omega^2[m])=0$

می توان فرکانس طبیعی یک سیستم N درجه آزادی را از حل معادله فوق برحسب ω بدست آورد و با جایگذاری ω های دستگاه می توان شکل مدها را بدست آورد

ارتعاشات آزاد سیستم های با بیش از دو درجه آزادی

در یک سیستم N درجه آزادی با رسم دیاگرام های آزاد N معادله دیفرانسیل حرکت را بدست آورده که آن را در دستگاه ماتریسی $[m]\ddot{\vec{x}}+[c]\dot{\vec{x}}+[k]\vec{x}=\vec{F}(t)$ با استفاده از ماتریس های اینرسی، میرایی و سختی بیان کرد

$F(t)=\begin{Bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix}$ بردار نیروهای خارجی

* ماتریس های اینرسی، سختی، میرایی و انعطاف پذیری، ماتریس های متقارن می باشند

فرکانس های طبیعی و شکل مدهای سیستم نامیرا

اگر شکل مد را در قالب برداری و به صورت $\varphi=\frac{1}{X_i}\begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{X_1}{X_i} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{X_n}{X_i} \end{Bmatrix}$ نمایش دهیم بردار φ را بردار مدی می نامیم. برای هر فرکانس طبیعی یک بردار مدی داریم

سیستم N درجه آزادی ← N بردار مدی

اگر این بردار را در قالب یک ماتریس $N\times N$ به صورت $[\varphi_1\ \varphi_2\ \cdots\ \varphi_N]$ نمایش دهیم این ماتریس مودال می نامیم

* بردارهای مدی φ_i متعامد می باشند

$$\varphi_i^T\varphi_j=\begin{cases} \neq 0 & i=j \\ =0 & i\neq j \end{cases}$$

مد اول و دوم در سیستم های سه درجه آزادی

سیستم متقارن

در مد اول فنرهای k_2 هیچ تغییر طولی نمی دهند $\omega_1=\sqrt{\frac{2k_1}{2m_1+m_2}}$ $\varphi=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

در مد دوم جرم m_2 ساکن و جرم های m_1 به صورت متقارن حرکت می کنند $\omega_2=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m_1}}$ $\varphi_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$

ارتعاشات اجباری سیستم های دو درجه آزادی

در دستگاه $\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$ فرض می کنیم سیستم نامیرا باشد $[c]=0$

حال پاسخ سیستم را به هر کدام از بردارهای زیر $\begin{Bmatrix} 0 \\ F_0 \sin\omega t \end{Bmatrix}$ و $\begin{Bmatrix} F_0 \sin\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$ را جداگانه بدست می آوریم

برای بردار ورودی اول

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{(k_2+k_3-\omega^2 m_2)F_0}{(k_1+k_2-\omega^2 m_1)(k_2+k_3-\omega^2 m_2)-k_2^2} \\ X_2 = \dfrac{k_2 F_0}{\quad} \end{cases}$$

5

برای بردار ورودی دوم

$$\begin{cases} \bar{X}_1 = \dfrac{\bar{k}_2 \bar{F}_0}{\quad} \\ \bar{X}_2 = \dfrac{(k_1+k_2-\bar{\omega}^2 m_1)\bar{F}_0}{\quad} \end{cases}$$

و پاسخ کلی سیستم به هر دو بردار نیروی $\begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$ از ترکیب پاسخ ها

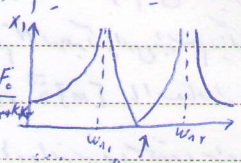
$$X_p(t) = \begin{Bmatrix} X_{1p}(t) \\ X_{2p}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}\sin\omega t + \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix}\sin\bar{\omega} t$$

جاذب ارتعاشی

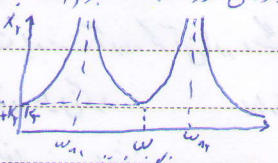
10 اگر در قسمت قبل فقط $F_1(t)=F_0\sin\omega t$ را داشته باشیم و ضرایب میرایی c_1, c_2, c_3 را صفر بگیریم و پاسخ به صورت $x_p = \begin{Bmatrix} x_{1p}(t) \\ x_{2p}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}\sin\omega t$ و جرم m_1 اگر نیرو به آن وارد می شود ثابت و جرم m_2 با فرکانس $\omega = \sqrt{\frac{k_2+k_3}{m_2}}$ که فرکانس ضربه شده است و سیستم جاذب ارتعاشی است

حرکت می کند

1/2 $\frac{(k_1+k_2)F_0}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}$



$\frac{F_0 k_2}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}$



فرکانس ضربه شده

15 * در طراحی جاذب های ارتعاشی اگر در صورت سؤال شکلی از سیستم ارتعاشی و جاذب کشیده نشده باشد و یا ویژگی آن گفته نشده باشد

سیستم جاذب
سیستم ارتعاشی اصلی

سیستم ارتعاشی اصلی و جاذب ارتعاشی را مانند شکل روبرو در نظر می گیریم

* در سیستم های جاذب ارتعاشی منظور از ω_{n1} فرکانس طبیعی سیستم ارتعاشی اصلی بدون جاذب می باشد و برابر $\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$

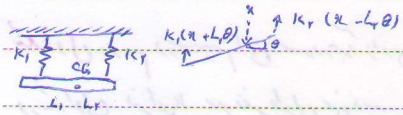
و منظور از ω_{n2} فرکانس جاذب ارتعاشی می باشد که برابر $\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ می باشد

* در جاذب های ارتعاشی فرکانس بخش جذب کننده ارتعاشات یعنی $\omega_{n2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ باید برابر با فرکانس عامل خارجی ω باشد

20 * جاذب ارتعاشی معمولاً هنگامی مورد استفاده قرار می گیرد که در سیستم اصلی حالت تشدید یا رزونانس باشد و فرکانس تحریک خارجی ω برابر $\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ باشد

* تا حد امکان جاذب ارتعاشی را کوچک انتخاب می کنند تا وزن سیستم اصلی تغییر نکند

جفت شدگی منفصلات



25 $$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2L_2+k_1L_1 \\ -k_2L_2+k_1L_1 & k_1L_1^2+k_2L_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = 0$$

اگر $k_2L_2 = k_1L_1$ آنگاه ماتریس سختی قطری می شود و دو گویه می گردند یعنی معادله حرکت انتقالی فقط برحسب x و معادله دورانی فقط برحسب θ می شود

* درحالتی که ماتریس سختی قطری می باشد معادلات حرکت سیستم بهم کوپل می شوند که این نوع کوپل شدگی را کوپلینگ استاتیکی گویند
* اگر در بیان معادلات دیفرانسیل حرکت یک سیستم فقط ماتریس سختی غیر قطری گردد آنگاه معادلات سیستم فقط دارای کوپلینگ استاتیکی می باشند و اگر فقط ماتریس اینرسی غیر قطری گردد آنگاه معادلات سیستم فقط دارای کوپلینگ دینامیکی می باشند و اگر هر دو ماتریس سختی و اینرسی غیر قطری باشند آنگاه معادلات سیستم هم دارای کوپلینگ استاتیکی می باشند هم کوپلینگ دینامیکی

مختصات اصلی (نرمال)

اگر در دستگاه مختصاتی معادلات حرکت سیستم کاملاً بی کوپل باشند آنگاه مختصات مورد نظر را مختصات اصلی (نرمال) گویند
یک سیستم جرم و فنر با دو درجه آزادی را در نظر بگیرید (q_1 و q_2) معادلات سیستم در قالب این دستگاه مختصات و بفرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0 \longrightarrow$$ معادلات حرکت سیستم

$$m_1\ddot{q}_1 + k_1 q_1 = 0 \rightarrow q_1 = A_1\cos\left(\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\,t\right) + B_1\sin\left(\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\,t\right)$$

$$m_2\ddot{q}_2 + k_2 q_2 = 0 \rightarrow q_2 = A_2\cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\,t\right) + B_2\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\,t\right)$$

* رابطه بین مختصات عمومی x_i و مختصات اصلی q_i برای یک سیستم N درجه آزادی به صورت زیر می باشد

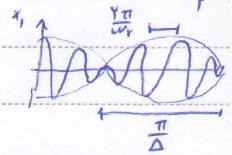
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{Bmatrix} = [\varphi_1 \cdots \varphi_N]\begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix}$$

پدیده فرابان در سیستم های دو درجه آزادی متقارن

حرکت سیستم دو درجه آزادی متقارن برای ایجاد پدیده فرابان یک شرط لازم آن است که دو فرکانس طبیعی سیستم نزدیک به یکدیگر و تقریباً با هم برابر باشند

$$\Delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

$$x_1(t) = \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \qquad x_2(t) = \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$



* پریود یا دوره تناوب تکرار عمل فرابان $\frac{\pi}{\Delta}$ می باشد

پدیده فرابان فقط در سیستم های دو درجه آزادی متقارن رخ می دهد

سیستم های پیوسته

ارتعاشات آزاد سیم یا کابل

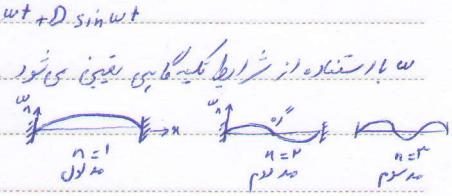
معادله حاکم بر حرکت سیم (کابل) $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ، $c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$ نیروی کشش P ، چگالی ρ

$$w(x,t) = W(x)\,T(t) \qquad W(x) = A\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) + B\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) \qquad T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

ω با استفاده از شرایط تکیه گاهی تعیین می شود و به عنوان شاخص شرایط تکیه گاهی دو سر درگیر دار

$$\omega = \frac{n\pi c}{L}$$

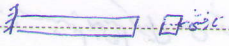
$$w_n(x,t) = W_n(x)\,T_n(t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left[C_n\cos\frac{n\pi c t}{L} + D_n\sin\frac{n\pi c t}{L}\right]$$



در مد Nام، N-1 گره در طول سیم تشکیل می شود

ارتعاشات آکوستیک

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$ ارتعاشات طولی



E مدول الاستیسیته و ρ چگالی

$$c^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad c=\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

I ممان اینرسی A سطح مقطع تیر

$$W(t) = A_1 e^{+\sqrt{\frac{\omega}{c}}x} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{c}}x} + A_3\cos\sqrt{\frac{\omega}{c}}x + A_4\sin\sqrt{\frac{\omega}{c}}x$$

$$T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

$$w_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left[C_n\cos\left(\frac{n^2\pi^2 c t}{L^2}\right) + D_n\sin\left(\frac{n^2\pi^2 c t}{L}\right)\right] \qquad \omega_n = \frac{n^2\pi^2 c}{L^2} \leftarrow \sqrt{\frac{\omega}{c}}L = n\pi$$

مثال برای تیر دو سر گیردار

* در یک تیر که در یک انتهای آن حتماً مقدار ثابتی برابر صفر می‌باشد در مد N ام، N-1 گره در طول سیم اندرکنش دارد
شکل مدها فقط تابع خصوصیات هندسی و شرایط مرزی سازه می‌باشد. مقدار فرکانس‌های طبیعی به خصوصیات سیم تنگی دارد

10

1/2

15

20

25

فصل ۶ - روش کار مجازی و معادلات لاگرانژ

$$\delta W = \sum_i (F_i - m\ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0$$ کار مجازی انجام شده

نیروهای اینرسی

معادلات لاگرانژ

یک سیستم N درجه آزادی دارای N مختصه عمومی مستقل $q_1, q_2, \dots, q_N$ می باشد که T انرژی جنبشی سیستم و U انرژی پتانسیل سیستم و D انرژی تلف شده، Q_i نیروها و گشتاورهای خارجی عمل کننده بر سیستم و مربوط به مختصه عمومی q_i

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

برای یک سیستم کانزرواتیو و بدون استهلاک معادله لاگرانژ به صورت

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

اگر $L = T - U \rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

* فرم دیگر معادله لاگرانژ به صورت روبرو است که Q_i صرف نیروها و گشتاورهای خارجی و استهلاکی است

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$$